Problemes

Ja tornem a ser-hi! Al contrari que a la molt eixuta secció del número 18 del *Notícies*, l'espai entre tres números ja ha donat prou marge per tal que hi hagi resposta dels nostres lectors, i ja tenim solucions per publicar! Permeteu-me, però, uns breus comentaris:

Del problema **A53** n'hem rebut solucions d'Esteve Casas, de Sant Celoni, i de Joaquim Nadal i Vidal, de l'IES Cassà de la Selva, amb un elegant raonament sobre el període de la fracció 1/29. La solució general requereix, però, artilleria una mica potent, com ara l'ús del familiar número 10 com a generador del grup multiplicatiu $\mathbb{Z}/(29)\ldots$. Quedi registrat aquí el nostre agraïment a ambdós autors. Igualment, publiquem les solucions d'aquests dos autors al problema **A54**.

El problema **A55** ha estat resolt per dues vies ben diferents! Una via, essencialment algebraica, d'Esteve Casas, i una altra, de caire més analític, d'Albert Ferreiro Castilla, estudiant a la UAB. Ell mateix ens dóna una bonica solució del problema **A57**.

Del problema **A58** en publiquem la solució de José Luis Díaz-Barrero, UPC, que és qui el va proposar. Igualment, ell és l'autor del problema **A61** i, a més d'agrair-li moltíssim la seva feina, l'animo, a ell i a tothom, a continuar en la seva valuosíssima col·laboració en aquesta secció del *Notícies*!

I ara permeteu-me un sentit lament: *no* he rebut cap solució dels problemes **A56** i **A60**. Ai la Geometria! Ai! El problema **A56** correspon a un muntatge *mecànic* ja descrit a *l'Encyclopédie* de **Diderot** i d'**Alembert**. Com que segueixo pensant que és molt bonic i instructiu quant a allò que es pot arribar a fer amb simples triangles rectangles i semblants, torno a proposar-lo aquí i us animo a treballar-lo. Els eixos de coordenades són *graduats* i, per tant, se'n coneix la longitud unitat.

I segueix el meu *planctus geometriæ*: el problema **A60** també és molt bonic i hi insisteixo, això és, el torno a proposar!

També torno a proposar el problema **A59**. Us recordo que, del meu coneixement, els camins per arribar a la solució són molt i molt variats, alguns d'ells geomètrics. Deixo, doncs, obert el repte a la vostra imaginació i creativitat.

Finalment, haig de tornar a agrair l'inestimable col·laboració dels lectors que ens envien enunciats de problemes i la dels que ens n'envien les solucions. Si voleu fer servir el correu electrònic, l'adreça és cromero@pie.xtec.es i les col·laboracions escrites en TEX o LaTEX ens estalvien un munt de feina. Moltes gràcies!

Problemes proposats

A56. Disposem d'un sistema de dos eixos de coordenades amb graduació, $n+1$ nombres reals $a_0, a_1, \ldots, a_n$ i una abscissa x. Cal, fent servir només un regle sense graduar (que no val per traslladar distàncies) i un escaire o cartabó per tirar perpendiculars, determinar el punt

$$(x\,,\ a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)$$

A59. Siguin a, b i m nombres enters tals que

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1} = m \geq 0$$

Cal demostrar que, llavors, m és un quadrat perfecte.

A60. Donats un rectangle i un paral·lelogram, cal inscriure en el paral·lelogram un rombe de la mateixa àrea que el rectangle.

A61. (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, UPC.) Per tot nombre enter i positiu n, proveu que

$$L_{n+2} < \frac{1}{2}\left(\frac{L_n^2}{L_{n+2}} + \frac{L_{n+1}^2}{L_n} + \frac{L_{n+2}^2}{L_{n+1}}\right)$$

on L_n és el terme n-èssim de la *successió de* **Lucas**:

$$\begin{cases} L_0 = 2 \\ L_1 = 1 \\ \text{Si } n \geq 2, L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \end{cases}$$

Solucions

A53. Trobeu tots els nombres naturals tals que, escrits en base 10, en passar la xifra de les unitats a l'esquerra del nombre i posar-la com a xifra més significativa, s'obté un altre nombre que és el triple del nombre inicial.

Solució: (Redacció.) Si $a_k, a_{k-1}, \dots a_2, a_1, a_0$ són les xifres del nombre N que compleix les condicions de l'enunciat i

$$N = 10^k \cdot a_k + 10^{k-1} \cdot a_{k-1} + \cdots + 10^2 \cdot a_2 + 10 \cdot a_1 + a_0$$

ha de ser:

$$\begin{aligned} 3 \cdot \Big(10^k \cdot a_k + 10^{k-1} \cdot a_{k-1} + \cdots +& \\ +10^2 \cdot a_2 + 10 \cdot a_1 + a_0\Big) &= \\ = 10^k \cdot a_0 + 10^{k-1} \cdot a_k + \cdots +& \\ + 10^2 \cdot a_3 + 10 \cdot a_2 + a_1& \end{aligned}$$

que dóna

$$\begin{aligned} &\left(3 \cdot 10^k - 10^{k-1}\right) \cdot a_k + \\ &+ \left(3 \cdot 10^{k-1} - 10^{k-2}\right) \cdot a_{k-1} + \\ &+ \cdots + \left(3 \cdot 10^2 - 10\right) \cdot a_2 + \\ &+ (3 \cdot 10 - 1) \cdot a_1 = \left(10^k - 3\right) \cdot a_0 \end{aligned}$$

és a dir,

$$\begin{aligned} 29 \cdot \Big(10^{k-1} \cdot a_k + 10^{k-2} \cdot a_{k-1} + \cdots +& \\ +10 \cdot a_2 + a_1\Big) = \left(10^k - 3\right) \cdot a_0\,.& \end{aligned}$$

Com que a_0 és una *xifra*, $0 \leq a_0 < 10 < 29$ i, per tant, o bé $a_0 = 0$ que no pot ser, o bé $29 | 10^k - 3$. Ha de ser

$$10^k \equiv 3 \pmod{29}$$

10 és un generador del grup multiplicatiu $\mathbb{Z}/(29)$ que és d'ordre 28 i, llavors, de $10^{28} \equiv 1 \pmod{29}$ i, de $30 \equiv 1 \pmod{29}$, se'n dedueix sense dificultat que

$$10^{27} \equiv 3 \pmod{29}$$

i, en definitiva, que

$$10^{27+28\lambda} \equiv 3 \pmod{29}$$

o sigui,

$$k = 27 + 28\lambda$$

Els nombres demanats tenen, doncs, $28n$ xifres i són els de la forma

$$N = \left(\frac{10 \cdot \left(10^{27+28\lambda} - 3\right)}{29} + 1\right) \cdot a_0$$

que tinguin, precisament, $28n$ xifres, cosa que obliga que $2 < a_0 < 10$. Això encara es pot escriure així:

$$N = \frac{10^{28\mu} - 1}{29} \cdot a_0\,, \quad \mu = 1, 2, \dots\,, \quad 2 < a_0 < 10$$

i els exemplars més *petits* s'obtenen per a $\mu = 1$:

$$\begin{aligned} &1034482758620689655172413793\,,\\ &1379310344827586206896551724\,,\\ &1724137931034482758620689655\,,\\ &2068965517241379310344827586\,, \qquad (*)\\ &2413793103448275862068965517\,,\\ &2758620689655172413793103448\,,\\ &3103448275862068965517241379 \end{aligned}$$

Observem encara que, de la igualtat

$$\begin{aligned} &10^{28\mu} - 1 = \left(10^{28} - 1\right) \cdot \\ &\cdot \left(1 + 10^{28} + 10^{2 \cdot 28} + 10^{3 \cdot 28} + \cdots + 10^{(\mu-1) \cdot 28}\right) \end{aligned}$$

en resulta

$$\begin{aligned} N = \Big(1 + 10^{28} + 10^{2 \cdot 28} + 10^{3 \cdot 28} + \cdots +& \\ + 10^{(\mu-1) \cdot 28}\Big) \cdot \frac{10^{28} - 1}{29} \cdot a_0& \end{aligned}$$

i, per tant, tots els nombres N que compleixen la condició demanada són repeticions cícliques d'algun dels nombres de (*). Amb $\mu = 2$ tenim

$$\begin{aligned} &1034482758620689655172413793103448\\ &\qquad 27586206896551724 13793\,,\\ &1379310344827586206896551724137931\\ &\qquad 034482758620689655 1724\,,\\ &1724137931034482758620689655172413\\ &\qquad 79310344827586206896 55\,,\\ &2068965517241379310344827586206896\\ &\qquad 5517241379310344827586\,,\\ &2413793103448275862068965517241379\\ &\qquad 3103448275862068965517\,,\\ &2758620689655172413793103448275862\\ &\qquad 0689655172413793103448\,,\\ &3103448275862068965517241379310344\\ &\qquad 8275862068965517241379\,. \end{aligned}$$

A54. Demostreu que, si x, y i z són nombres naturals i termes consecutius d'una progressió aritmètica, llavors no hi ha cap nombre n natural, senar i més gran que 2 que faci bona la igualtat

$$x^n + y^n = z^n$$

Solució: (Solució d'Esteve Casas, St. Celoni.)
1. Podem suposar que

$$\begin{aligned} x &= ak + m \\ y &= a(k+1) + m \\ z &= a(k+2) + m \end{aligned}$$

que $a > 1$ (el cas $a = 1$ el tractarem més avall) i, a més, que m.c.d.$a, m = d = 1$, ja que si fos $d > 1$ sempre podríem considerar una nova solució inferior a l'anterior amb

$$x' = \frac{x}{d}, \qquad y' = \frac{y}{d}, \qquad z' = \frac{z}{d}$$

i és clar que aquest procés no es pot repetir indefinidament.

Acceptat aquest supòsit, tindrem que $\forall k, n \in \mathbb{N}\,,$ m.c.d.$a, (ak+m)^n = 1$ i, si l'equació de **Fermat** té solució, obtindrem la igualtat:

$$(a(k+2)+m)^n - (a(k+1)+m)^n = (ak+m)^n$$

és a dir:

$$\begin{aligned} &((a(k+2)+m)- \\ &-(a(k+1)+m))\left((a(k+2)+m)^{n-1}+\right. \\ &+(a(k+2)+m)^{n-2}(a(k+1)+m)+\dots \\ &\left.\dots+(a(k+1)+m)^{n-1}\right) = \\ &= a\left((a(k+2)+m)^{n-1}+\right. \\ &+(a(k+2)+m)^{n-2}(a(k+1)+m)+\dots \\ &\left.\dots+(a(k+1)+m)^{n-1}\right) = \\ &= (ak+m)^n \end{aligned}$$

Però això, si $a > 1$, no és pas possible ja que a i $(ak+m)^n$ són primers entre ells.

El problema es redueix, doncs, a estudiar el cas $a = 1$ i això permet expressar l'equació de **Fermat** de la forma:

$$k^n + (k+1)^n = (k+2)^n$$

La reducció de la nostra equació mòdul $k+1$, k i $k+2$ ens permet arribar a les conclusions següents:

$$\begin{aligned} &(-1)^n \equiv 1^n \mod (k+1) \Rightarrow n \text{ és parell} \\ &1^n \equiv 2^n \mod k \Rightarrow 2^n - 1 = \lambda k, \ \ \lambda \in \mathbb{N} \\ &(-2)^n + (-1)^n \equiv 0 \mod (k+2) \end{aligned}$$

i, per ser n parell,

$$2^n + 1 \equiv 0 \mod (k+2)$$

En definitiva,

$$2^n + 1 = \mu(k+2), \ \mu \in N$$

on, per cert, $\mu \geq \lambda$. En igualar les dues equacions anteriors obtenim un sistema que ens obliga que

$$\mu = \lambda = 1$$

El problema queda ara reduït a veure que, per a n parell i més gran o igual que 4, l'equació següent no té solució:

$$(2^n - 1)^n + (2^n)^n = (1 + 2^n)^n\,.$$

Si reescrivim l'equació anterior, podem posar:

$$1 = \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^n$$

i, si tenim en compte la relació

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + \ldots + y^{n-1})$$

ens quedarà que:

$$1 = \frac{1}{2^{n-1}}\left(\left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{n-1} + \cdots + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^{n-1}\right).$$

El segon terme de la igualtat és inferior a

$$\frac{n}{2^{n-1}}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{n-1}$$

on, senzillament, he agrupat els termes després de substituir

$$\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^{n-1}$$

per

$$\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{n-1}.$$

Encara podem fitar una mica més i canviar

$$\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{n-1}$$

per

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

que, al seu torn, per ser un terme de la successió creixent que dóna lloc al nombre e, és inferior a 3.

Arribem, doncs, a la desigualtat següent:

$$\frac{1}{2^{n-1}}\left(\left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{n-1}+\cdots+\right.$$
$$\left.+\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^{n-1}\right)<\frac{3n}{2^{n-1}}\,.$$

Ara, la funció

$$f(x)=\frac{3x}{2^{x-1}}$$

és clarament decreixent a partir de $x=4$: només cal derivar-la i veure que la derivada és negativa. Si calculem les imatges d'aquesta funció, llevat del cas $n=4$ que dóna $12/8$, les altres ja són inferiors a 1. Per exemple, la imatge de 6 és $18/32$ i la funció és decreixent! Hem reduït, doncs, la possibilitat que l'equació tingui solució al cas $n=4$, el qual es comprova ràpidament que no compleix. De fet només el cas $n=2$ i els valors $3,4,5$ són solucions admissibles.

2. (Solució de Joaquim Nadal i Vidal, de l'IES Cassà de la Selva.)

Sigui d la diferència entre dos termes consecutius de la progressió x,y,z que suposem solució.

Si d fos parell, llavors x,y,z serien de la mateixa paritat. No poden ser tots tres senars si és que han de complir que $x^n+y^n=z^n$. Però, si tots tres són parells, llavors

$$\frac{x}{2},\frac{y}{2},\frac{z}{2}$$

també són una solució i formen una progressió aritmètica de diferència $d/2$ i, si $d/2$ encara és parell, $x/2, y/2, z/2$ són tots tres parells i

$$\frac{x}{4},\frac{y}{4},\frac{z}{4}$$

és una altra solució, que és una progressió aritmètica de diferència $d/4$. Ja es veu que una repetició d'aquest procés ens porta a una solució amb diferència D senar.

Sigui, doncs,

$$X=Y-D\,,\quad Y\,,\quad Y+D$$

una solució amb D senar. Si Y és parell, llavors $Y-D$ i $Y+D$ són, ambdós, parells, cosa impossible si s'ha de complir que

$$(Y-D)^n+Y=(Y+D)^n\,.$$

En conseqüència, Y és parell. Si ara fem el desenvolupament de les potències dels binomis, segons la fórmula de **Newton** i tenim en compte que n és senar, obtenim

$$\begin{aligned}&Y^n-\binom{n}{1}Y^{n-1}D+\binom{n}{2}Y^{n-2}D^2-\cdots\\&\quad+\binom{n}{n-1}YD^{n-1}-D^n+Y^n=\\&=Y^n+\binom{n}{1}Y^{n-1}D+\binom{n}{2}Y^{n-2}D^2+\dots\\&\quad+\binom{n}{n-1}YD^{n-1}+D^n\end{aligned}$$

és a dir,

$$\begin{aligned}&Y^n+2\binom{n}{1}Y^{n-1}D+2\binom{n}{3}Y^{n-3}D^3+\cdots\\&\quad+2\binom{n}{n-2}YD^{n-2}+2D^n=0\end{aligned}$$

Si Y és parell i $n>2$ llavors, a la igualtat anterior, tots els monomis que contenen Y són múltiples de 4 i, per tant, també ho és $2D^n$. Això implica que D^n i, per tant, D és parell, que és una contradicció!

A55. (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, UPC.) Donats els nombres $a,b,c\in\mathbb{R}$, tots diferents de zero, proveu que l'equació

$$ax^2+2(ab+bc+ca)x+3bc(a+b+c)=0$$

té totes les seves arrels reals.

Solució: (Solució d'Esteve Casas, St. Celoni.) **1.**

El discriminant de l'equació

$$\Delta_0=4(ab+bc+ca)^2-12abc(a+b+c)$$

ha de ser més gran o igual que 0 i, en fer càlculs i interpretar el resultat com un polinomi de segon grau en la lletra c (per exemple),

$$\Delta_0=\left(a^2+b^2-ab\right)c^2-\left(ab^2+a^2b\right)c+a^2b^2$$

arribem a la conclusió que aquest, al seu torn, ha de tenir un discriminant menor o igual que 0. Ara fem el càlcul d'aquest discriminant:

$$\begin{aligned}\Delta_1&=\left(a^2b+b^2a\right)^2-4a^2b^2\left(b^2+a^2-ab\right)=\\&=a^2b^2(b+a)^2-4a^2b^2\left(b^2+a^2-ab\right)=\\&=a^2b^2\left((b+a)^2-4\left(b^2+a^2-ab\right)\right)=\\&=a^2b^2\left(b^2+2ab+a^2-4a^2-4b^2+4ab\right)=\\&=a^2b^2\left(3\left(2ab-a^2-b^2\right)\right)=\\&=-3a^2b^2(a-b)^2\le 0\end{aligned}$$

que efectivament es compleix sempre.

2. (Solució d'Albert Ferreiro Castilla, estudiant a la UAB.) Denotem per $p(x)$ el polinomi

$$p(x) = ax^2 + 2(ab+bc+ca)x + 3bc(a+b+c)$$

Com que $a \neq 0$ tenim un polinomi de segon grau, continu i derivable. La derivada és

$$p'(x) = 2ax + 2(ab+bc+ca)$$

i $p(x)$ assoleix un màxim/mínim en el punt

$$x_m = -\frac{ab+bc+ca}{a}$$

que és real ja que a no pot ser zero i, com que el polinomi és de segon grau, aquest màxim/mínim serà absolut.

D'altra banda,

$$\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \mathrm{signe}(a)\cdot\infty\,.$$

On volem arribar és a demostrar que

$$\mathrm{signe}(a)\cdot p(x_m) \leq 0$$

ja que si $\mathrm{signe}(a)\cdot p(x_m) = 0$ llavors x_m és una arrel del polinomi, però, per ser alhora màxim/mínim absolut, n'és una de doble, i ja haurem acabat.

Si, al contrari, $\mathrm{signe}(a)\cdot p(x_m) < 0$, llavors hi ha x_n prou gran en valor absolut per al qual

$$p(x_n)p(x_m) < 0$$

i

$$p(-x_n)p(x_m) < 0$$

i, llavors, només cal aplicar el *teorema de* **Bolzano** per assegurar l'existència de dues arrels reals.

Dediquem-nos, doncs, a provar que

$$\mathrm{signe}(a)\cdot p(x_m) \leq 0$$

que és equivalent a

$$a\cdot p(x_m) \leq 0\,.$$

Tenim:

$$\begin{aligned}
a\cdot p(x_m) \leq 0 \iff{}& a\left(a\left(-\frac{ab+bc+ca}{a}\right)^2 + \right.\\
&+2(ab+bc+ca)\left(-\frac{ab+bc+ca}{a}\right)+\\
&\left.+\,3bc(a+b+c)\right) \leq 0 \iff\\
\iff{}& (ab+bc+ca)^2 - 2(ab+bc+ca)^2 +\\
&+\,3abc(a+b+c) \leq 0 \iff\\
\iff{}& (ab+bc+ca)^2 - 3abc(a+b+c) \geq 0 \iff\\
\iff{}& (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 - acb^2\\
&- cba^2 - abc^2 \geq 0 \iff\\
\iff{}& 2\frac{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}{2}\\
&\frac{-acb^2 - cba^2 - abc^2}{2} \geq 0 \iff\\
\iff{}& \frac{(ab-bc)^2+(ab-ca)^2+(bc-ca)^2}{2} \geq 0
\end{aligned}$$

Però, per ser el denominador positiu i el numerador una suma de quadrats, aquesta expressió sempre és positiva o nul·la si el numerador és zero.

A57. En un llibre antic vam trobar-hi escrit això:

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}}$$

Què podria significar i quin podria ser-ne el valor?

Solució: (Solució d'Albert Ferreiro Castilla, estudiant a la UAB.) Començarem per establir una altra expressió que signifiqui el mateix que

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}} \tag{1}$$

però que ens sigui més útil per treballar. Considerem la successió següent:

$$\begin{cases} a_0 &= \sqrt{2}\\ a_{n+1} &= \left(\sqrt{2}\right)^{a_n}\,. \end{cases} \tag{2}$$

Així, interpreto (1) com el límit, si n'hi ha, de la successió (2).

Anem ara a provar una sèrie de fets que farem servir després:

Fet: Si $p < 2$, aleshores $\left(\sqrt{2}\right)^p$ també és més petit que dos. En efecte:

$$p < 2 \implies \frac{p}{2} < 1 \implies 2^{\frac{p}{2}} < 2^1 = 2 \implies \implies \left(\sqrt{2}\right)^p < 2 \tag{3}$$

Fet: Si $0 < p < 2$, aleshores $\left(\sqrt{2}\right)^p > p$. Prova:

Sigui $f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x - x$.

La funció f és contínua i derivable

$f'(x) = 2^{\frac{x}{2}} \ln \sqrt{2} - 1$

$f'(x) = 0$ si, i només si, $2^{\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{\ln \sqrt{2}}$

$f'(x) = 0$ si, i només si,

$$x = 2 \log_2 \frac{1}{\ln \sqrt{2}} \approx 3.05 \tag{4}$$

$f(x) = 0 \implies x = 2$ o $x = 4$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$

$x = 2 \log_2 \dfrac{1}{\ln \sqrt{2}} \approx 3.05$

és un mínim absolut.

Si $x < 2$, aleshores $f(x) > 0$.

Ara ja tenim tots els elements per concloure el problema:

La successió (2) és fitada superiorment per (3) i, per (4), hom veu que és monòtona creixent. Podem concloure, doncs, que té límit.

Vegem ara quin n'és el límit l. El candidat a límit ha de complir que, quan n tendeixi a infinit,

$$l = \left(\sqrt{2}\right)^l$$

però, per (4), els únics nombres que compleixen aquesta condició són 2 i 4. La resposta òbvia és $l = 2$, ja que la successió està fitada per 2. Resulta:

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot}}}}}} = 2$$

A58. (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, UPC.) Siguin a, b i c tres nombres positius tals que $abc(a+b+c) = 1$. Proveu que

$$\left[\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right)\left(b^2 + \frac{1}{c^2}\right)\left(c^2 + \frac{1}{a^2}\right)\right]^{1/2} \le \frac{8}{27}(a+b+c)^3 .$$

Solució: (Solució del proponent.) Com que que $abc(a+b+c) = 1$,

$$a^2 + \frac{1}{b^2} = a^2 + \frac{abc(a+b+c)}{b^2} = \\ = \frac{a^2 b + ac(a+b+c)}{b} = \\ = \frac{a(ab+bc+ca+c^2)}{b} = \frac{a(b+c)(c+a)}{b} .$$

Anàlogament, s'obté

$$b^2 + \frac{1}{c^2} = \frac{b(c+a)(a+b)}{c}$$

i

$$c^2 + \frac{1}{a^2} = \frac{c(a+b)(b+c)}{a} .$$

En multiplicar les identitats anteriors resulta:

$$\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right)\left(b^2 + \frac{1}{c^2}\right)\left(c^2 + \frac{1}{a^2}\right) = \\ = (a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$$

o, equivalentment,

$$\left[\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right)\left(b^2 + \frac{1}{c^2}\right)\left(c^2 + \frac{1}{a^2}\right)\right]^{1/2} = \\ = (a+b)(b+c)(c+a)$$

Si ara tenim en compte que la mitjana geomètrica de tres nombres positius és més petita o igual que la seva mitjana aritmètica, resulta

$$(a+b)(b+c)(c+a) \le \\ \le \left[\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\right]^3 = \\ = \left[\frac{2(a+b+c)}{3}\right]^3 = \frac{8}{27}(a+b+c)^3$$

Observeu que la igualtat es verifica quan $a = b = c = \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

Carles Romero
IES Manuel Blancafort, la Garriga